

$$\frac{dx}{dt} = -kx(t) + f(t), \quad f(t) \in C$$

17/02

$$x(t=0) = x_0, \quad 0 \leq t \leq T$$

- непр. модель
(when в процессе лечения
л.п. поступает через капель
ницу)

Но л.п. может вводиться дискретно $\Rightarrow$
дискрет. модель, используя δ -ф-цию

Импульс. ф-ция - $P_{\Delta}(t) = \begin{cases} 0, & t > \Delta t, \\ \frac{1}{2\Delta t}, & -\Delta t \leq t \leq \Delta t, \\ 0, & t < -\Delta t \end{cases}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_{\Delta}(t) dt = \int_{-\Delta t}^{\Delta t} \frac{1}{2\Delta t} dt = 1$$

δ -ф-ция — $\delta(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} P_{\Delta}(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0, \\ \infty, & t = 0 \end{cases}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau) \delta(\tau - t) d\tau \quad // \text{св-во} \quad \begin{matrix} t - \tau = z \\ \tau = t - z \end{matrix}$$

$\int x_0 = 0$ в исход задаче. $\neq$ моменты времени

$t_n, n = \overline{1, N}; f_n, t_1 = 0$

$$f(t) = \sum_{n=1}^N f_n \delta(t - t_n) \quad // \text{дискретное представление через } \delta\text{-ф-цию}$$

$$x(t) = \int_0^t f(\tau) e^{k(\tau-t)} d\tau \quad \text{— реш. ур-ния}$$

$$x(t) = \int_0^t \sum_{n=1}^N f_n \delta(\tau - t_n) e^{k(\tau-t)} d\tau = \sum_{n=1}^N f_n \cdot$$

$$\int_0^t e^{k(\tau-t)} \delta(\tau - t_n) d\tau = \sum_{n=1}^N f_n e^{k(t_n-t)}$$

↑
св-во δ -ф-ции

Вводим ч.п. через равные промежутки времени $T \Rightarrow t_n = (n-1)T, n = \overline{1, N}$

If мы $\neq t \in [t_{m-1}, t_m]$, то как себя

ведет концентр. $x(t)$?
здесь ничего нет
была введена индукция

$$x_m(t) = \sum_{n=1}^m f_n e^{k(t_n-t)} = \sum_{n=1}^m f_n e^{k((n-1)T-t)} =$$

$$= C [e^{-kt} + e^{kT-kt} + \dots + e^{k(m-1)T-kt}] = C e^{-kt}$$

$$\cdot [1 + e^{kT} + \dots + e^{k(m-1)T}] \Leftrightarrow$$

Геом. прогрессия: $b_1 = 1$, $q = e^{kT}$; $\frac{b_1(q^m - 1)}{q - 1}$

$$\Leftrightarrow C e^{-kt} \frac{e^{kmT} - 1}{e^{kT} - 1} = x_m(t), t \in [(m-1)T, mT]$$

Замена переменн.: $t = (m-1)T + \tau \Rightarrow 0 \leq \tau \leq T$

Тогда $x_m(t) = C e^{-k[(m-1)T + \tau]} \frac{e^{kmT} - 1}{e^{kT} - 1},$

$$x_m(\tau) = C e^{-k\tau} \cdot \frac{e^{kT} - e^{-k(m-1)T}}{e^{kT} - 1},$$

$$x_m(\tau) = C e^{-k\tau} \cdot \frac{1 - e^{-kmT}}{1 - e^{-kT}}$$

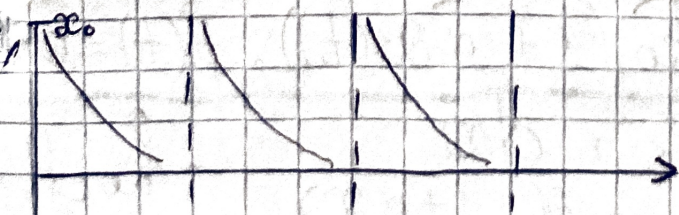
Можно утверждать, что это период ф-ция
 $\Rightarrow$ исследование л.п. на периоде

x_0 — оптимальное кол-во л.п. д/лечения

$$x_0 = C / (1 - e^{-kT}) \Rightarrow$$

$$x_m(\tau) = x_0 e^{-k\tau} \cdot (1 - e^{-kmT})$$

$$\tilde{x}(\tau) = \frac{x(\tau)}{x_0} = e^{-k\tau} \quad // \text{нормируем}$$



// Лечение на периоде

Нелинейные модели

Коэф-т распада ↑, чем конц-ция ↑

В нелиней. моделях ^{уже} возникают сложности

Напоминание: ≠ только тривиал. модели

$$\boxed{1) x'(t) = -kx(t) + f(t), x(t=t_0) = x_0}$$

1ая модель → $k = k_0^{const} x(t)$ ⇒

$$1) x'(t) = -k_0 x^2 + f(t), x(t=t_0) = x_0; \Rightarrow \text{решение}$$

$$\frac{dx}{x^2} = -k_0 dt \Leftrightarrow \int \frac{1}{x^2} = \int -k_0 dt \Leftrightarrow -\frac{1}{x} = -k_0 t + C \Leftrightarrow x(t) = \frac{1}{k_0 t + C}$$

$$\text{// нач. усье //} \Rightarrow x_0 = \frac{1}{k_0 t_0 + C} \Leftrightarrow C = \frac{1}{x_0} - k_0 t_0 = \frac{1 - k_0 t_0 x_0}{x_0} \quad \text{вычисление}$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{k_0 t + \frac{1 - k_0 t_0 x_0}{x_0}} = \frac{x_0}{1 + k_0 x_0 (t - t_0)}$$

Модель не такая хорошая, т.к. концент-рация убыв. медленнее, чем в лн., вл она убыв. экспоненциально

2ая модель → $k = k_0 (1 + \alpha x(t))$; $f(t) = 0$

$$x'(t) = -k_0 (1 + \alpha x) x \Leftrightarrow \frac{dx}{x(1 + \alpha x)} = -k_0 dt \Leftrightarrow$$

Вычисление

$$\frac{1}{x(1+\alpha x)} = \frac{1}{x} - \frac{\alpha}{(1+\alpha x)} \quad // \text{ MHK}$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dx}{x} - \alpha \int \frac{dx}{1+\alpha x} = -k_0 t + C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x - \ln(1+\alpha x) = -k_0 t + C \Leftrightarrow \ln \frac{x}{1+\alpha x} = -k_0 t + C \Leftrightarrow \frac{x}{1+\alpha x} = C e^{-k_0 t}$$

$$\frac{x_0}{1+\alpha x_0} = C e^{-k_0 t_0} \Leftrightarrow C = \frac{x_0}{1+\alpha x_0} e^{k_0 t_0}$$

$$\frac{x}{1+\alpha x} = \frac{x_0}{1+\alpha x_0} e^{-k_0(t-t_0)} \Leftrightarrow (1+\alpha x_0)x = (1+\alpha x x_0) e^{-k_0(t-t_0)}$$

$$e^{-k_0(t-t_0)} \Leftrightarrow x(1+\alpha x_0 - \alpha x_0 e^{-k_0(t-t_0)}) = x_0 e^{-k_0(t-t_0)}$$

$$e^{-k_0(t-t_0)} \Leftrightarrow x(t) = \frac{x_0 e^{-k_0(t-t_0)}}{1+\alpha x_0(1-e^{-k_0(t-t_0)})}, \quad t > t_0$$

концентрация и убывает по exp $\Rightarrow$ лучше

Двухкомпонентная модель фармакокинетики



$x_1(t)$



$x_2(t)$

$$Q_1^1 = [x_1(t+\Delta t) - x_1(t)] V_1$$

$$Q_1^2 = [x_2(t+\Delta t) - x_2(t)] V_2$$

изм-ние кон-ва л.п. в т.ч. в 2х органах за Δt

$$Q_2^1 = -k_{12} x_1(t) V_1 \Delta t$$

$$Q_2^2 = -k_{21} x_2(t) V_2 \Delta t$$

вывод л.п.

коэф-т распада л.п. внутри органа

$$Q_3^1 = f_1 V_1 \Delta t \quad \text{ввод. л.п.}$$

$$Q_3^2 = f_2 V_2 \Delta t \quad \text{ввод. л.п.}$$

$$Q_H^1 = -k_{12} x_1(t) V_1 \Delta t$$

$$Q_H^2 = k_{12} x_1(t) V_1 \Delta t$$

Перетекание из 1-го органа во 2-й

$$\text{ЗС: } Q_1^1 = Q_2^1 + Q_3^1 + Q_H^1,$$

$$Q_1^2 = Q_2^2 + Q_3^2 + Q_H^2;$$

$$(x_1(t+\Delta t) - x_1(t)) V_1 = -k_1 x_1(t) V_1 \Delta t + f_1 V_1 \Delta t - k_{12} x_1(t) V_1 \Delta t, \quad \text{// Сокращаем на } V_1 //$$

$$(x_2(t+\Delta t) - x_2(t)) V_2 = -k_2 x_2(t) V_2 \Delta t + f_2 V_2 \Delta t + k_{12} x_1(t) V_1 \Delta t; \quad \text{// Сокращаем на } V_2 //$$

// Сокращ. на Δt и $\lim_{\Delta t \rightarrow 0}$ в обоих //

$$\frac{dx_1}{dt} = -k_1 x_1 + f_1 - k_{12} x_1,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -k_2 x_2 + f_2 + k_{12} x_1 \frac{V_1}{V_2}$$

Консервативная модель — когда $f_1 = f_2 = 0$, $k_1 = k_2 = 0$, только перетекание

$$\frac{dx_1}{dt} = -k_{12} x_1, \quad | V_1 \quad V_1 \frac{dx_1}{dt} = -k_{12} x_1 V_1,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = k_{12} x_1 \frac{V_1}{V_2} \quad | V_2 \quad V_2 \frac{dx_2}{dt} = k_{12} x_1 V_1$$

$$\Rightarrow V_1 x_1' + V_2 x_2' = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} (x_1 V_1 + x_2 V_2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 V_1 + x_2 V_2 = \text{const}$$

$$x_1(t_0) = x_{10}, \quad x_2(t_0) = x_{20}$$

$$\text{const} = x_{10} V_1 + x_{20} V_2$$

$$x_1 V_1 + x_2 V_2 = x_{10} V_1 + x_{20} V_2$$

Переходим к извлеченной с-ме $\Rightarrow$

$$\Rightarrow x_1(t) = C e^{-k_{12}t}$$

$$x_{10} = C e^{-k_{12}t_0} = C \Leftrightarrow x_1(t) = x_{10} e^{-k_{12}t}$$

$t_0 = 0$

$$\frac{dx_2}{dt} = k_{12} x_{10} \frac{V_1}{V_2} e^{-k_{12}t} \Leftrightarrow x_2(t) = -x_{10} \frac{V_1}{V_2} e^{-k_{12}t} + C$$

+ C

$$x_{20} = -x_{10} \frac{V_1}{V_2} + C \Leftrightarrow C = x_{20} + x_{10} \frac{V_1}{V_2} = \frac{x_{20} V_2 + x_{10} V_1}{V_2}$$

$$x_2(t) = \frac{x_{20} V_2 + x_{10} V_1}{V_2} - \frac{x_{10} V_1}{V_2} e^{-k_{12}t}$$

Заметим, что при $t \rightarrow \infty$ (когда процесс установился): $x_1 \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$, $x_2 \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \frac{x_{20} V_2 + x_{10} V_1}{V_2}$

Вывод-ся ли ВС? Да. (в им органе ничего не осталось)